

# 《数学大观》

## 二十九、非欧几何

主讲人：青课

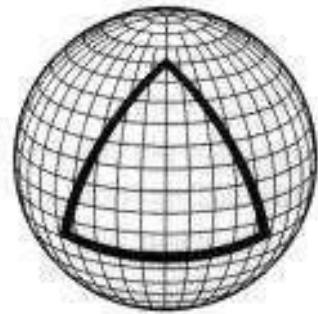


在群思想引入前，代数学主要是初等代数学，指的是19-世纪以前的方程理论。

群概念引进后，代数学的研究对象渐渐转向代数系统结构的研究，即变成了抽象代数学，这一过程被称为**代数学的解放**。



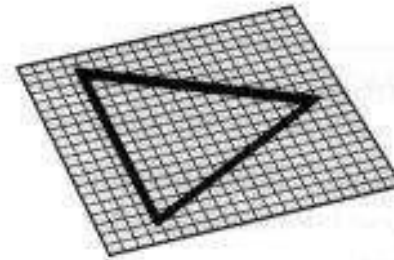
19世纪，随着数学的迅速发展，产生了新的几何学——非欧几何学，这是几何学的一次变革，标志着欧几里得几何一统天下局面的结束。



Positive Curvature



Negative Curvature



Flat Curvature



非欧几何学是一门不同于欧几里得几何体系的数学分支体系，最主要的区别在于公理体系中采用了**不同的平行公理**。

非欧几何学

广义：一切和欧几里的几何学不同的几何学

狭义：只是指罗式几何

通常意义：罗式几何和黎曼几何这两种几何。

在数学史上，长期以来，人们对空间的认识只能是欧几里得体系下的绝对“平直”的空间。

18世纪，在航海中，人们发现地面是弯曲的，接近球面。19世纪，随着交通运输业的发展，促使人们对曲面的深入研究。

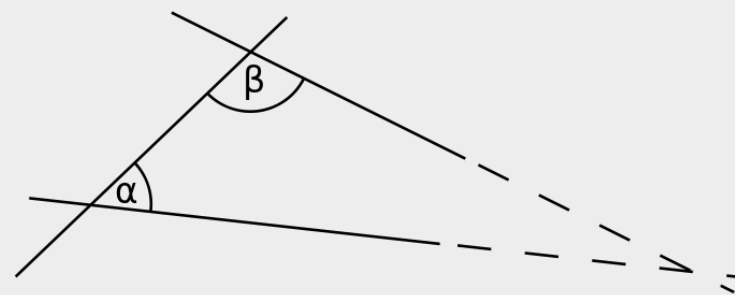


这样，由于生产和社会实践的发展和需要，人们对空间的绝对“平直”发生了怀疑，逐渐形成了新的空间概念。



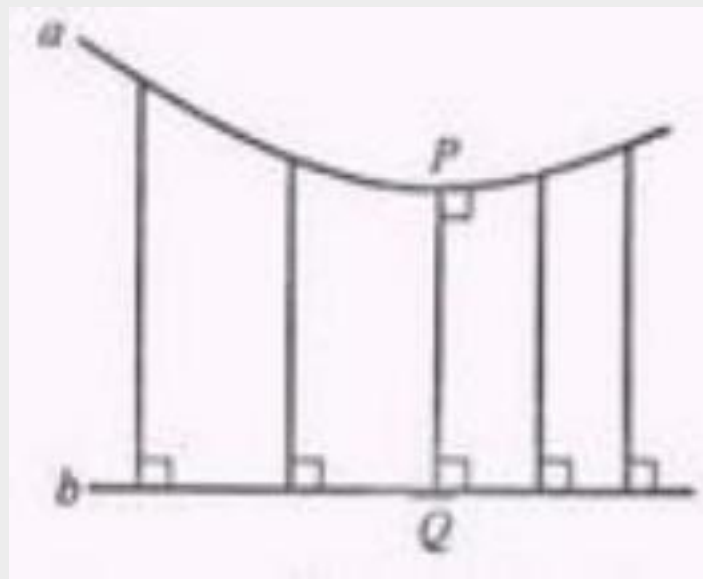
非欧几何产生的历史源于欧几里得的  
《几何原本》提出的第五公设——**平行公设**：

如果一条线段与两条直线相交，在某一侧的内角和小于两直角和，那么这两条直线在不断延伸后，会在内角和小于两直角和的一侧相交。





萨克里( Saccheri, 1667—1733)和  
兰勃特( Lambert, 1728-1777)等人试  
图证明出平行公设, 但均归于失败, 却  
引出了一串与第五公设相等价的新命题  
和定理, 即非欧几何的公理和定理。





高斯 (Gauss, 1777—1855) 认为，欧几里得几何中的平行公理只对欧氏几何才是有效的，如果把它修改一下，变成“过直线外一点可以作多于一条与该直线平行的线”，则完全可以推出另一套几何学来。



几乎在高斯创立非欧几何学的同时，匈牙利数学家**鲍耶·亚诺什**（Janos Bolyai, 1802-1860）也发现了**第五公设不可证明和非欧几何学的存在**。

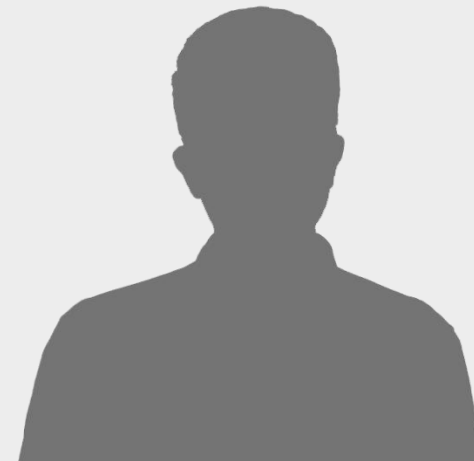




罗巴切夫斯基，1818

第五公设问题的彻底解决者是19  
世纪年轻的俄国数学家**罗巴切夫斯基**  
(1792-1856)。





罗巴切夫斯基产生了与前人完全不同的信念：

首先，他认为第五公设不能以其余的公理作为定理来证明；

其次，除掉第五公设成立的欧氏几何之外，还可能有第五公设不成立的新几何系统存在。

于是，他在剔除第五公设而保留欧氏几何其余公理的前提下，引进与第五公设相反的公理，从而构造了一个全新的几何系统，它与欧氏几何系统相并列。



1826年2月23日，罗巴切夫斯的第一篇关于非欧几何的论文——《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》问世，**标志着非欧几何的诞生**，这一天被认为是“非欧几何学的誕生日”，但却遭到正统数学家的冷漠和反对。

直到1868年，非欧几何才开始获得学术界的普遍注意和深入研究。

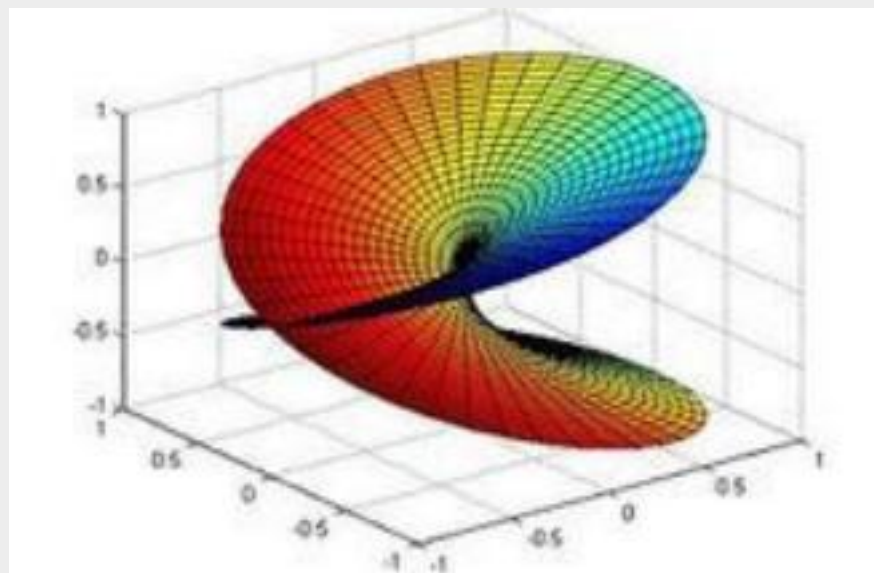
德国数学家黎曼是非欧几何的创始人之一。他开创高维抽象几何的研究，建立了一种全新的几何体系，对现代几何乃至数学和科学各分支的发展都产生了巨大的影响。



1854年黎曼提出了一种新的几何学。  
他把欧氏几何的第五公设改为“过平面上已知直线外一点没有直线与原直线平行”，由此可推出“**三角形内角和大于 $\pi$** ”的命题。



黎曼还把欧几里得三维空间推广到  $n$  维空间，  
从而得到一种新的几何学——黎曼非欧几何学。







在黎曼看来，有**三种不同的几何学**，它们的差别在于通过给定一点做关于定直线所作平行线的条数：

如果只能作一条平行线，即为熟知的**欧几里得几何学**；  
如果一条都不能作，则为**椭圆几何学**；  
如果存在一组平行线，就得到第三种几何学，即**罗巴切夫斯基几何学**。



黎曼的研究导致另一种非欧几何——**椭圆几何学**的诞生。黎曼因此继罗巴切夫斯基以后发展了空间的理论，使得一千多年来关于欧几里得平行公理的讨论宣告结束。

他断言，**客观空间**是一种特殊的流形，预见具有某种特定性质的流形的存在性。这些逐渐被后人一一予以证实。

## 非欧几何学 的意义

非欧几何的建立是人们对空间观念认识的一次飞跃

导致了人们对几何学基础的深入研究

对于20世纪初物理观念的改革起了重大的推动作用

感谢聆听

